

中学校数学科

第3学年

5 図形と相似

[思考力・判断力・表現力を育む問題]

[解答例]

中学校

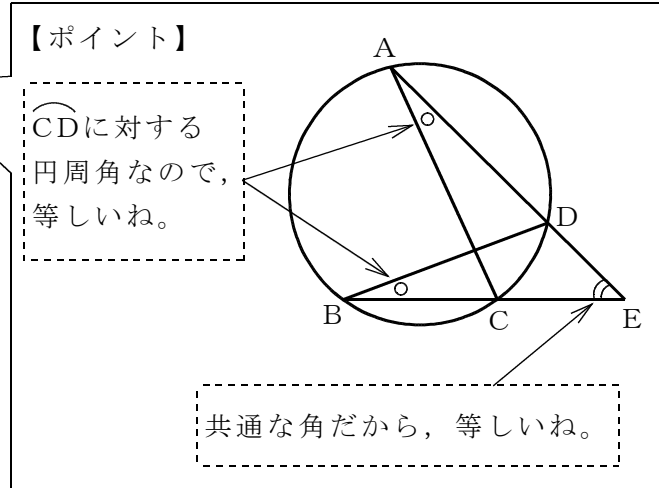
年 組 号 氏名

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年 組 号 氏名

■練習問題①

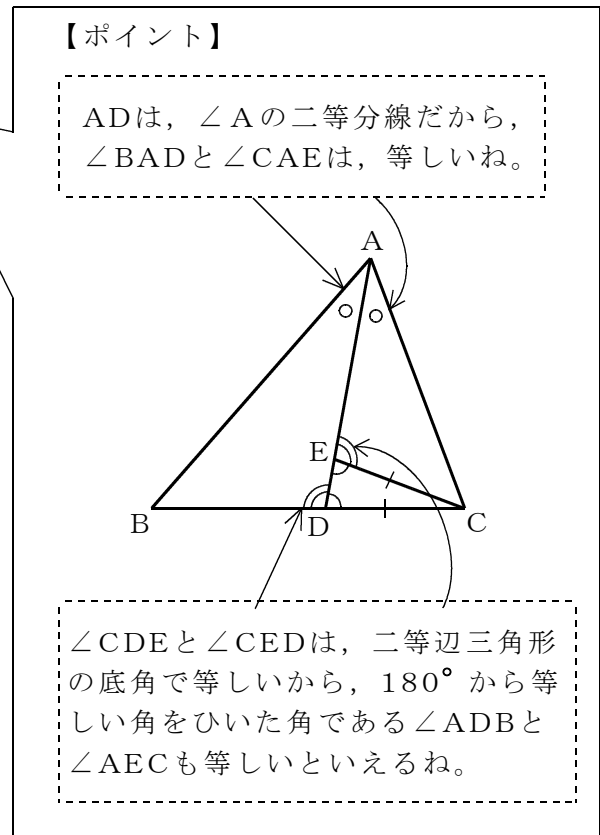
1

証明 $\triangle ACE$ と $\triangle BDE$ で、
 \widehat{CD} に対する円周角だから、
 $\angle CAE = \angle DBE$ ……①
 共通な角だから、
 $\angle AEC = \angle BED$ ……②
 ①、②より、
 2組の角がそれぞれ等しいので、
 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$



2

証明 $\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ で、
 AD は、 $\angle A$ の二等分線だから、
 $\angle BAD = \angle CAE$ ……①
 仮定より、 $\triangle CDE$ は、 $CD = CE$ の二等辺三角形だから、
 $\angle CDE = \angle CED$ ……②
 また、
 $\angle ADB = 180^\circ - \angle CDE$ ……③
 $\angle AEC = 180^\circ - \angle CED$ ……④
 ②、③、④より、
 $\angle ADB = \angle AEC$ ……⑤
 ①、⑤より、
 2組の角がそれぞれ等しいので、
 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$



■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年 組 号 氏名

■練習問題②

1

A 4判用紙の長さが短い方の1辺の長さが1, 長い方の1辺の長さが x なので,
 A 3判用紙の長さが短い方の1辺の長さは x , 長い方の1辺の長さは2となる。
 2つの用紙は相似な長方形だから,

$$1 : x = x : 2$$

$$x^2 = 2$$

$x > 0$ より, $x = \sqrt{2}$

したがって, 求める2辺の長さの比は, $1 : \sqrt{2}$ である。

【ポイント】
 右の図のように, 2つの長方形をならべると, 対応する辺と辺が, 分かりやすくなるね。

2

四角形EFCDは正方形だから, $AB = 1$ より, $EF = FC = 1$ である。
 よって, $AE = BF = BC - BF = x - 1$ となる。
 長方形EABFと長方形ABCDは相似だから,

$$(x - 1) : 1 = 1 : x$$

$$x(x - 1) = 1$$

$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ より, $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

したがって, 求める黄金比は,
 $1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ である。

【ポイント】
 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は,
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ だね。

【ポイント】
 下の図のように, 2つの長方形をならべると, 対応する辺と辺が, 分かりやすくなるね。

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年 組 号 氏名

■練習問題③

1 21cm

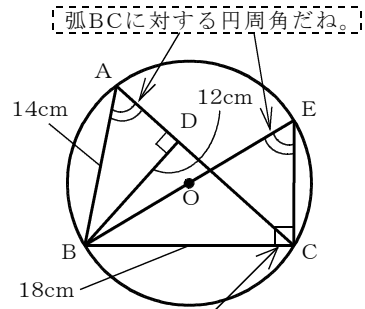
【ポイント】

CEをひいて、 $\triangle EBC$ をつくると、
 BEは直径だから $\angle BCE=90^\circ$ で、 $\angle ADB=\angle BCE$ 。
 また、 \widehat{BC} に対する円周角だから、 $\angle BAD=\angle BEC$ 。
 2組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABD \sim \triangle EBC$ だね。
 相似な図形の対応する辺の比は等しいので、

$$BA : BE = BD : BC$$

$$14 : BE = 12 : 18 \text{ より、}$$

$$BE = 21 \text{ (cm) となるね。}$$



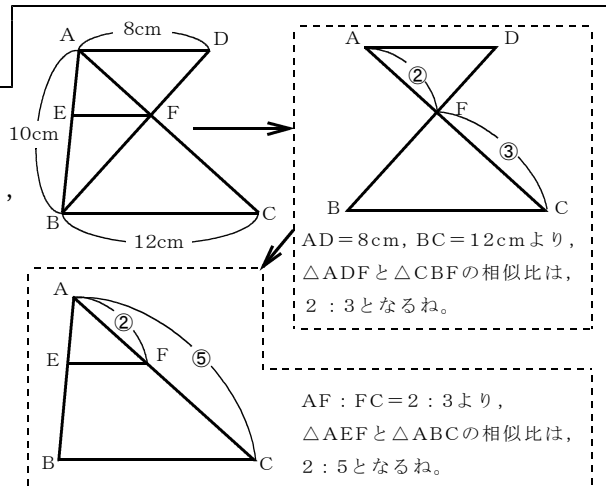
半円の弧に対する円周角は、 90° だね。

2 $AE = 4 \text{ (cm)}$, $EF = \frac{24}{5}$ または 4.8 (cm)

【ポイント】

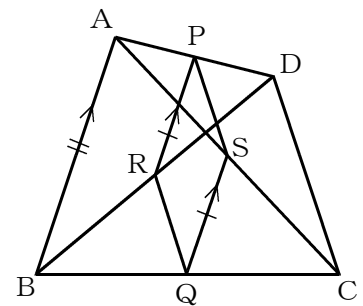
$AD \parallel BC$ より、 $\triangle ADF \sim \triangle CBF$ だから、
 $AF : FC = AD : BC = 8 : 12 = 2 : 3$ となり、
 $AF : AC = 2 : 5$ となるね。

さらに、 $EF \parallel BC$ より、
 $AE : AB = EF : BC = 2 : 5$ といえるので、
 $AE : 10 = 2 : 5$ より、 $AE = 4 \text{ (cm)}$ 、
 $EF : 12 = 2 : 5$ より、 $EF = \frac{24}{5} \text{ (cm)}$
 となるね。



3

証明 $\triangle DAB$ で、点P, RはそれぞれDA, DBの中点だから、
 中点連結定理より、 $PR \parallel AB$, $PR = \frac{1}{2} AB$ ……①
 $\triangle CAB$ で、点S, QはそれぞれCA, CBの中点だから、
 中点連結定理より、 $SQ \parallel AB$, $SQ = \frac{1}{2} AB$ ……②
 ①, ②より、 $PR \parallel SQ$, $PR = SQ$
 よって、1組の向かいあう辺が等しくて平行だから、
 四角形PRQSは平行四辺形である。



【ポイント】

平行四辺形であることを証明するには、平行四辺形になる条件のどれかがいえることを証明することが必要だね。この問題では、解答例のように、中点連結定理から1組の向かいあう辺が等しくて平行であることをいう証明の方法が、一番簡潔にまとめられるね。また、 $\triangle DAB$ と $\triangle CAB$ の代わりに、 $\triangle ACD$ と $\triangle BCD$ を使っても、解答例と同様に、証明することができるね。

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年 組 号 氏名

■練習問題④

1 (1) 4倍

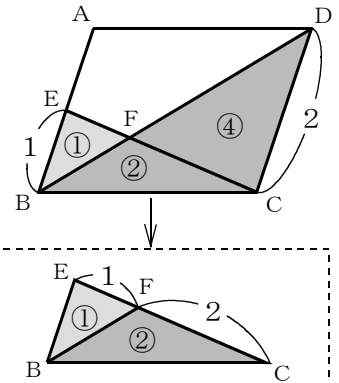
【ポイント】

AB // DCより、 $\triangle EBF \sim \triangle CDF$ となるね。
 また、EはABの中点で、 $AB = CD$ だから、
 $EB : CD = 1 : 2$ で、相似比は $1 : 2$ となるね。
 よって、 $\triangle EBF$ と $\triangle CDF$ の面積比は $1 : 4$ となるから、面積は4倍になるね。

(2) $60 \text{ (cm}^2\text{)}$

【ポイント】

(1)より、 $\triangle FBE : \triangle FCD = 1 : 4$
 また、 $EF : CF = EB : CD = 1 : 2$ だから、
 $\triangle FBE : \triangle CBF = 1 : 2$
 ①、②より、 $\triangle FBE : \triangle BCD = 1 : 6$
 平行四辺形ABCDの面積は、 $\triangle BCD$ の面積の2倍だから、 $\triangle FBE$ の面積の12倍となるね。よって、求める面積は、
 $5 \times 12 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$ となるね。

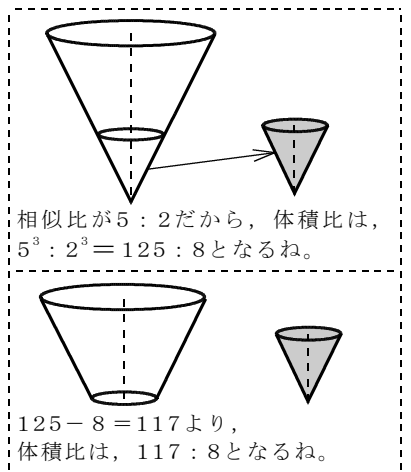


$\triangle FBE$ と $\triangle CBF$ の面積比は、EFとFCの比に等しく、 $1 : 2$ になるね。

2 15回

【ポイント】

容器全体の円錐と、水が入った円錐の部分は、相似な図形であると考えられるから、相似比は $5 : 2$ で、体積比は、 $5^3 : 2^3 = 125 : 8$ となるね。
 よって、この容器の水が入っていない部分と、水が入った円錐の部分の体積比は、
 $125 - 8 : 8 = 117 : 8$ となるね。
 $117 \div 8 = \frac{117}{8} = 14.625$ より、この容器を満水にするには、このコップいっぱいの水の14.625倍の水を入れる必要がある。よって、少なくとも15回は、水を入れることが必要である。



3 小人1人とガリバーの相似比は、 $1 : 12$ と考えられる。小人1人とガリバーがそれぞれ必要とする食料と飲み物の量を比で表すとしたら、体積比で考えることになるので、 $1^3 : 12^3 = 1 : 1728$ となる。よって、1728人分が必要である。

【ポイント】

「小人の国では、人や草木などすべてが、ガリバーの国のものと形は同じであったが、大きさは12分の1であった。」ということから、小人とガリバーは、ほぼ相似であり、相似比は、 $1 : 12$ であると考えられることができるね。

小人とガリバーの相似比を $1 : 12$ と考え、ガリバーが必要とする食料と飲み物を、体積比の関係から $12^3 = 1728$ (人分)と考えたことについて、書けていれば正解だね。